



厦门大学《高等代数(II)》课程试卷

数学, 统计学院各系 2021 年级各专业

主考教师: 杜妮 林鹭 阮诗隼 试卷类型: A 卷 考试日期: 22.6.13

一、填空题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设映射 $(-, -): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 如下: $(X, Y) = X^T A^T A Y$, 则 $(-, -)$ 是一个内积的充分必要条件是 $\det A$ 满足_____.
2. 设 W 是 n 维欧氏空间 V 的 $n-1$ 维子空间, φ 是 V 的线性变换. 若有非零向量 $\alpha \in V$, 满足 $\alpha \perp W$ 且 $\varphi(\alpha) \perp W$, 则 α _____ (选填 “必是”, “未必”) 是 φ 的一个特征向量.
3. 设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 的对称变换, $\alpha \in V$ 且 $|\alpha| = 1$, 则 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha))^2$ 与 $(\varphi^2(\alpha), \varphi^2(\alpha))$ 的大小关系是_____.
4. 设 A 是 5 阶实对称矩阵. 若 $r(A) = 4$, 且存在正数 a , 使得 $A^2 + aA = 0$, 则 A 在 \mathbb{C} 上的规范形是_____, 在 \mathbb{R} 上的规范形是_____, \mathbb{R} 上的正交相似标准形是_____.
5. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是_____.
6. n 阶正交且对称的实矩阵全体按合同分类, 可以分成_____类.

二、选择题: (18分. 每题3分, 共6题)

1. 设 V 是有限维欧氏空间, 则下列关于过渡矩阵的叙述中错误的是_____.
(A) V 的不同基的过渡矩阵是可逆矩阵
(B) V 的不同基的过渡矩阵是正交矩阵
(C) V 的不同标准正交基的过渡矩阵是可逆矩阵
(D) V 的不同标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

2. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 则下列叙述中正确的有_____个.

- (1) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$ (2) 若 $V_1 \cap V_2 = 0$, 则 $V_1^\perp \cap V_2^\perp = 0$
 (3) 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $V_2 = V_1^\perp$ (4) 若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 $V = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 且_____, 则 φ 是镜面反射.

- (A) φ 保长度 (B) φ 的极小多项式是 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)$
 (C) φ 的特征多项式是 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{n-1}$ (D) φ 的属于特征值 -1 的几何重数是1

4. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交线性替换化为标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 6y_1^2$, 则 $a =$ _____.

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

5. 下列实矩阵中, _____与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 合同.

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则_____不是 A 为负定的充分必要条件.

- (A) A 合同于 $-E_n$ (B) A 的所有顺序主子式全小于0
 (C) A 的所有特征值全小于0 (D) 对任意非零 n 维实向量 X , $X^TAX < 0$

三、(12分) 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$, $\alpha_2 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, $\alpha = \xi_2 + 2\xi_3$, 记 $W = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

- (1) 求 W 的一个标准正交基;
 (2) 求 W^\perp 的一个标准正交基;
 (3) 求 α 在 W 的正射影及 α 到 W 的距离 (即求 β 与 $|\gamma|$, 其中 $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in W$, $\gamma \in W^\perp$).

四、(12分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 的秩为2.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形以及所作的可逆线性替换(要求写出计算过程).

五、(12分) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, ψ 是 V 的线性变换. 证明: $\psi = \varphi^{-1}$ 的充分必要条件是任意的 $\alpha, \beta \in V$, 总成立 $(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta))$.

六、(10分) 设 A 是 m 阶正定矩阵, B 是 n 阶负定矩阵, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明: $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数分别是 m 和 n .

七、(10分) 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵.

(1) 证明: AB 的特征值都是正实数;

(2) 又若 C 为 n 阶正定矩阵, 且满足 $ABC = CBA$, 证明: ABC 是正定矩阵.

八、(8分) 设 φ, ψ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 且对任意 $\alpha \in V$, 有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\psi(\alpha), \psi(\alpha))$. 证明:

(1) 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\psi(\alpha), \psi(\beta))$;

(2) 存在正交变换 σ , 使得 $\psi = \sigma\varphi$.

附加题 (10分)

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 定义 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上函数为:

$$f(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

已知 n 阶实可逆矩阵 P 满足: 对任意 n 阶实矩阵 A , 都有 $f(PAP^{-1}) = f(A)$. 证明: 存在正实数 c , 使得 $P^T P = cE_n$, 其中 E_n 为 n 阶单位矩阵.